Schriftliche abschließende Prüfung der 8B zum 1. Haupttermin 2004/05
MATHEMATIK
DI Mag. Beate Innertsberger

---

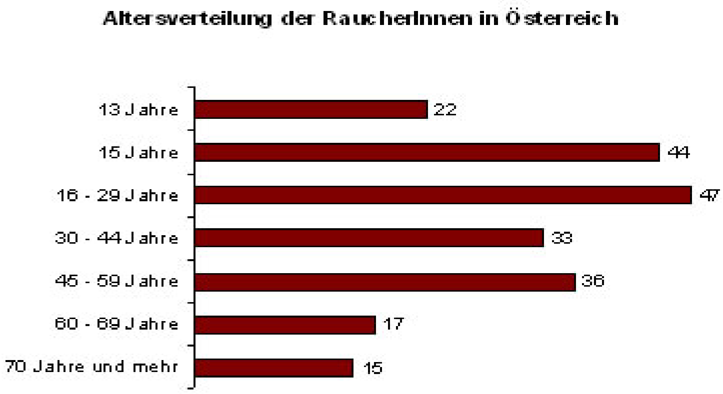
1. Differential- und Integralrechnung:
Eine Polynomfunktion dritten Grades hat im Punkt P(-3/4) eine waagrechte Tangente, bei x= - 2 einen Wendepunkt und bei x = -1 eine Nullstelle.

a) Bestimme die Gleichung der Polynomfunktion!

b) Berechne die Nullstellen, Extremstellen und Wendepunkte der Funktion $\mathbf{f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4}$! Ermittle die Gleichung der Wendetangente und zeichne anschließend den Graphen der Funktion und die Wendetangente!
(x - Achse: 1 Einheit = 2 cm, y - Achse: 1 Einheit = 1 cm)

c) Berechne die Fläche, die von der Funktion f(x) und der Geraden g(x) = ½ x + 3 eingeschlossen wird.

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung
Der Zigarettenkonsum stellt heute in den Industrieländern das bedeutendste Gesundheitsrisiko und die führende Ursache frühzeitiger Sterblichkeit dar. Die Krankheitsbelastung durch den Zigarettenkonsum und ihr Einfluss auf die Gesamtsterblichkeit sind in ihrem Ausmaß historisch beispiellos. Beunruhigend ist vor allem die Entwicklung bei Jugendlichen. Die Rauchanfänger werden immer jünger.
(http://oh-forum.themenplattform.com/151492.0/)
Betrachte dazu folgende Statistik:



Angaben in Prozent!

a.) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in der 8B (23 SchülerInnen)
(i) genau 10
(ii) mindestens 4 RaucherInnen sind.

b.) Wie viele 15-jährige SchülerInnen müsste man befragen um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens eine(n) Raucher(in) zu erwischen!

c.) Im Europagymnasium gibt es zwei 8. Klassen (8A: 16 SchülerInnen, 8B: 23 SchülerInnen). In der 8A gibt es 6 RaucherInnen, in der 8B 11. Bei einer Schulveranstaltung wurde jemand heimlich beim Rauchen erwischt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er aus der 8A?

Der Zigarettenkonsum ist erfahrungsgemäß normalverteilt mit im Mittel 20 Zigaretten pro Tag. Die Standardabweichung beträgt dabei 3 Zigaretten pro Tag.

d.) Bei wie viel Prozent der Raucher übersteigt der Konsum 25 Zigaretten pro Tag?
e.) In welchem Bereich liegt der Zigarettenkonsum mit 95% iger Wahrscheinlichkeit?

3. Vektorrechnung/Extremwertbeispiel

a.) Gegeben sei der Kreis k [M(1, 2), r = 5] und die Gerade g: x + 7y = 40.
Berechne die Länge der Sehne, die entsteht, wenn die Gerade g den Kreis k schneidet!
Bestimme den Normalabstand der Geraden g zum Mittelpunkt M des Kreises k.

b.) Von einer Hyperbel (1. HL) kennt man die Punkte A(20 | 6) und B(34 | 15).
Von einer Ellipse (1. HL) sind die Brennpunkte $F_{1,2}$ ($\pm 5 \cdot \sqrt{21}$ | 0) und ein weiterer Punkt C(15 | 8) bekannt.
(i) Ermittle die Gleichungen der Hyperbel und der Ellipse.
(ii) Berechne die Schnittpunkte zwischen den Kegelschnitten.
(iii) Stelle die Gleichungen der Tangenten im Schnittpunkt S(x >0 | y > 0) auf.
(iv) Berechne den Schnittwinkel zwischen den Kurven.

c.) Schreibe dem Ellipsoid, das durch die Rotation der Ellipse $4x^2 + 25y^2 = 2500$ um die x-Achse entsteht, den volumsgrößten Drehkegel ein, dessen Spitze im linken Hauptscheitel der Ellipse liegt. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkegels?

4. Trigonometrie

In Chicago steht einer der höchsten Wolkenkratzer der Welt, der Sears-Tower. Von einem Fenster (F) eines gegenüberliegenden Bürogebäudes sieht ein Beobachter den Eingang (E) des Sears-Towers unter einem Tiefenwinkel von α = 35° in der Entfernung $\overline{EF} = 157m$. Die Dachspitze (S) des Wolkenkratzers erscheint ihm unter dem Höhenwinkel β = 70°.
Fertige eine Skizze an!

a.) Berechne die Entfernung f= $\overline{FS}$ des Beobachters von der Dachspitze.
b.) Berechne die Höhe H des Wolkenkratzers.
c.) Berechne, wie viele Meter h der Beobachter F unter der Dachspitze des Sears-Towers steht.
d.) Berechne die horizontale Entfernung e des Bürogebäudes vom Sears-Tower.

Der Beobachter fährt nun mit dem Lift auf das Dach (D) des Bürogebäudes ganz nach oben, das 379m hoch ist. Dort befindet er sich 400,2m Luftlinie vom Eingang des Sears-Towers entfernt.

e.) Berechne die Entfernung g vom Beobachtungspunkt (D) zur Dachspitze (S) des Wolkenkratzers.
f.) Berechne den Sehwinkel δ = <SDE unter dem der Beobachter am Dach den gesamten Sears-Tower sieht.

5. Exponentielle Wachstums- und Zerfallsgesetze
Nach der Reaktorkatastrophe Ende April 1986 in Tschernobyl waren im radioaktiven Fallout, der auch Österreich verseuchte, mengenmäßig die Isotope Jod-131 und Caesium-137 stark vertreten.

a.) Das langlebige Cs-137 hat eine Halbwertszeit von 30 Jahren.
   (i) Stelle das Zerfallsgesetz für Cs-137 auf. (Auf 5 Nachkommastellen!!!)
   (ii) Berechne, wie viel Prozent der Anfangsmasse seit dem Unfall bis heuer (Jahr 2 005) zerfallen sind.
   (iii) Wie lange dauert es, bis die Caesiumbelastung auf 10% ihres Maximalwertes zurückgeht.
   (iv) Nach einem Jahr wurde in Milch eine Belastung von 30 Bq/l gemessen. Wie hoch war die Ausgangsbelastung nach dem Reaktorunfall?

b.) Der Zefall von Jod-131 ist durch die Gleichung $N(t) = N_0 . e^{-0,08664.t}$ (t in Tagen) gegeben.
Berechne die Halbwertszeit und zeige, dass beim radioaktiven Zerfall die Halbwertszeit unabhängig von der Ausgangsmenge ist.

Alle Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!
Die Rechenergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind auf 4 Nachkommastellen zu runden, jene der anderen Beispiele auf 2!

Viel Erfolg!