

Beispiel 1: Differentialrechnung, exponentieller Zerfall:

22 Punkte

1.a)

(7)

Der Kesselwandferner im Ötztal ist ein Gletscher, der sich mehrere Jahrzehnte stark zurückgezogen hat. In den darauf folgenden Jahren hat seine Länge wieder zugenommen.

Aus Trendberechnungen haben Geophysiker und Meteorologen der Universität Innsbruck folgende Messdaten für ihre Berechnungen der Länge des Kesselwandgletschers herangezogen:



Jahr	Länge in Metern
1922	5371,2
1956	4545
2006	5220

Bestimme jene Funktionsgleichung, die den Zusammenhang zwischen Jahreszahl und Längenausdehnung angibt, unter der Annahme, dass es sich um eine Polynomfunktion 2. Ordnung handelt.

In welchem Jahr hatte der Kesselwandferner seine minimale Ausdehnung und wie groß war diese?

1.b)

(15)



Mit Hilfe der ^{14}C -Methode lässt sich das Alter eines organischen Fundes berechnen. Das Isotop ^{14}C reichert sich in Pflanzen, Menschen und Tieren an und zerfällt mit einer Halbwertszeit von ca. 5730 Jahren.

- Stelle das Zerfallsgesetz auf!
- Bei der Freilegung einer vorchristlichen Siedlungsstätte fand man Knochen von Haustieren. Der Anteil an ^{14}C in diesen Knochen wurde mit 40 % des ursprünglichen Wertes gemessen. Wann (Zeitpunkt!) hat dieses Tier in etwa gelebt?
- Bis zu welchem Alter lassen sich mit dieser Methode Fundstücke untersuchen, wenn man bis zu einem Tausendstel des ursprünglichen ^{14}C -Gehalts messen kann?
- Wie groß war ^{14}C -Menge von derzeit 21 g vor 3000 Jahren?
- 1991 wurde in den Ötztaler Alpen im Gletschereis die Mumie eines Mannes (Ötzi) gefunden. Mit Hilfe der ^{14}C -Methode ermittelte man ein Alter von ca. 5200 Jahren. Wie viel Prozent an ^{14}C konnten zum Zeitpunkt des Fundes noch nachgewiesen werden?

Beispiel 2: Nichtanalytische Geometrie, Integralrechnung: 22 Punkte

2.a) (10)

Ein historischer Kelch hat die Form eines Rotationskörpers mit folgendem Achsenschnitt (Maße in cm):

Der Hohlraum des Kelches ist im Wesentlichen ein Rotationsparaboloid. Er ist 9 cm tief und hat 9 cm Öffnungsdurchmesser.

- i. Wie viel Liter fasst das randvoll gefüllte bzw. das bis zur halben Höhe gefüllte Gefäß? (7)
- ii. In welchem Abstand vom oberen Rand muss die Markierung für $\frac{1}{8}$ Liter angebracht werden? (3)

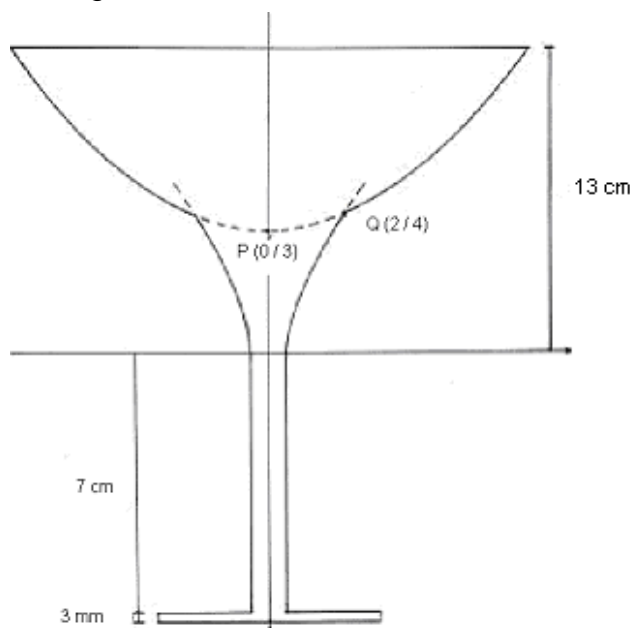
2.b) (12)

Die Skizze zeigt den Außenschnitt des Kelches:

Der obere Teil ist 13 cm hoch und wird durch eine Parabel mit $P(0 | 3)$ und $Q(2 | 4)$ und eine Hyperbel in erster Hauptlage mit $b = 1$ und $Q(2 | 4)$ begrenzt.

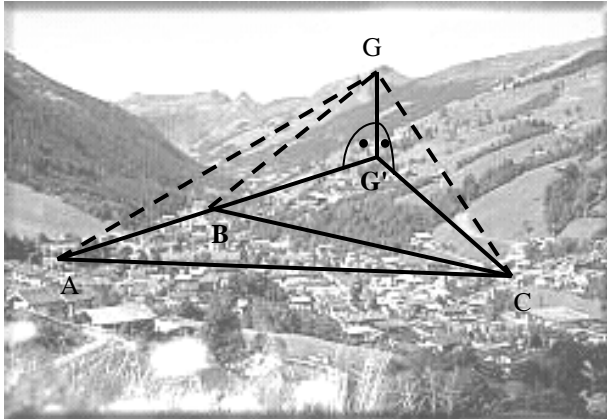
Der 7 cm lange zylinderförmige Stiel ruht auf einer zylindrischen Standfläche, die einen Durchmesser von 6 cm und eine Höhe von 3 mm hat.

- i. Stelle die Gleichungen der Parabel und der Hyperbel auf! (4)
- ii. Welche Masse hat das leere Cocktailglas, wenn die Dichte des verwendeten Glases $2,6 \text{ g/cm}^3$ beträgt? (8)



Beispiel 3: Trigonometrie

14 Punkte



Die drei Orte A, B und C liegen in einer Ebene. Die Entfernung AB beträgt 3250 m. Von einem Berggipfel G aus sieht man A und B in derselben Richtung unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 10,8^\circ$ und $\beta = 18,6^\circ$. Nach Drehen des Messinstruments um den Horizontalwinkel $\varepsilon = 38,5^\circ$ misst man zu C den Tiefenwinkel $\gamma = 12,1^\circ$.

- a) Wie hoch liegt der Berggipfel über der Ebene? (8)
- b) Wie weit ist C von B entfernt? (3)
- c) Berechne die Entfernung AC! (3)

Beispiel 4: Vektorrechnung

20 Punkte

Gegeben sind die 4 Punkte $A(0/2/0)$, $B(0/4/0)$, $C(4/2/2)$ und $S(0/2/4)$ einer dreiseitigen Pyramide mit dem Dreieck ABC als Grundfläche und dem Punkt S als Spitze.

- a) Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist, und bestimme die Größen der restlichen Winkel des Dreiecks. (5)
- b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. (2)
- c) Ermittle eine Normalvektorgleichung der Ebene ε , in der die Punkte A, B und C liegen. (2)
- d) Bestimme die Höhe der Pyramide und berechne ihr Volumen. (4)
- e) Diskutiere die verschiedenen Möglichkeiten der Lagebeziehung zwischen einer Ebene und einer Geraden in \mathbb{R}^3 und beschreibe jeweils die entsprechende Lösung bei der Schnittmengenbestimmung. Fertige entsprechende Skizzen an! (3)
- f) Berechne die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius des Kreises k, der in der Ebene ε liegt und durch die drei Punkte A, B und C verläuft. (4)



Beispiel 5: Wahrscheinlichkeitsrechnung

18 Punkte

Die Fernsehsendung „Fußball-WM 06“ berichtet über das Sportgeschehen der Fußballweltmeisterschaften in Deutschland.



5.a)

Leider treten bei den Live-Übertragungen immer wieder Bild- und Tonstörungen auf. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Bildstörung auftritt, beträgt 4 %. Ist das Bild gestört, so kommt mit einer 60 %-igen Wahrscheinlichkeit auch noch eine Tonstörung dazu. Ist das Bild einwandfrei, so ist auch der Ton mit 90 % Wahrscheinlichkeit in Ordnung. Die Ereignisse sind voneinander unabhängig.

(7)

- i. Stelle den Sachverhalt graphisch dar! **(2)**
- ii. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine einwandfreie Bild- und Tonübertragung? **(2)**
- iii. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist? **(3)**

5.b)

Im Studio ist ein Fußballtor aufgebaut. Ein Studiogast treffe mit einer Wahrscheinlichkeit p in das Tor. Wie groß darf p sein, damit der Gast bei 6 Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einmal trifft?

(3)

5.c)

10 000 Besucher wollen ein bestimmtes Fußballspiel live im Stadion mitverfolgen. Aus Erfahrung weiß man, dass 10 % der Besucher mit Schlagstöcken, Wurfgeschossen usw. ausgerüstet sind. Wie groß ist die Chance der Polizei bei zufälliger Durchsuchung von 1000 Besuchern mindestens 100 und höchstens 120 Rowdies zu erwischen? Verwende die Normalverteilung als Näherung!

(4)

5.d)

Der Sender braucht 400 neue, einwandfreie Magnetbänder. Erfahrungsgemäß sind 2 % der gelieferten Bänder schadhaft. Wie viele Bänder müssen mindestens bestellt werden, damit mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit wenigstens 400 einwandfreie Bänder darunter sind? Verwende die Normalverteilung als Näherung!

(4)

**Alle Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!
Die Rechenergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind auf 4
Nachkommastellen zu runden, jene der anderen Beispiele auf 2!**

Viel Erfolg!