Beispiel 1: Nichtanalytische Geometrie, Integralrechnung **17 Punkte**

Der Turm eines Atomkraftwerks hat die Form eines einschaligen Drehhyperboloids. Am Boden hat der Behälter einen Radius von $3\sqrt{5}$ m. In einer Höhe von 12 m weist er den kleinsten Radius mit 3 m auf. Die Gesamthöhe des Behälters beträgt 18 m.

a.) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und fertige eine Skizze an! Stelle die Gleichung der Hyperbel auf, die bei Drehung um die y–Achse den gegebenen Turm erzeugt! (4)

b.) Wie viele Liter Wasser fasst der Turm, wenn er vollständig mit Kühlwasser befüllt wird? (3)

c.) Wie hoch steht der Wasserspiegel, wenn der Behälter zu 70% gefüllt ist? (3)

Zur Entsorgung wird das verbraucht Kühlwasser in Stahlfässer gefüllt, die die Form eines Drehellipsoids haben. Der Durchmesser der Grund- und Deckfläche eines Fasses beträgt dabei 1 m, der größte Durchmesser (=Spinddurchmesser) 1,5 m und die Höhe des Fasses ist 2 m.

„Hilfe, so nicht!!!“

d.) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und fertige eine Skizze an! Stelle die Gleichung der Ellipse auf, die bei Drehung um die x–Achse ein oben beschriebenes Fass ergibt! (4)

e.) Bestimme das Volumen eines Fasses und berechne, wie viele Fässer nötig sind, um das gesamte Kühlwasser eines vollständig gefüllten Turms eines Atomkraftwerks zu lagern! (3)

Beispiel 2: Differentialrechnung, Integralrechnung **17 Punkte**

Bestimme die Funktionsgleichungen folgender Funktionen:
Funktion f: Ein zur y-Achse symmetrischer Graph einer Polynomfunktion 2. Grades schneidet die x-Achse an der Stelle 1 und geht durch den Punkt P(0 | 4)
Funktion g: Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades berührt den Graphen der Funktion f in den beiden Nullstellen und verläuft außerdem noch durch den Punkt Q($\sqrt{5}$ | 0)

a.) Ermittle die Funktionsgleichungen von f und g! (6)

b.) Diskutiere die Funktionen f: $y = -4x^2 + 4$ und g: $y = x^4 - 6x^2 + 5$ (Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte und Wendetangenten) und skizziere sie in einem Koordinatensystem! (8)

c.) Berechne den Inhalt des von beiden Kurven eingeschlossenen Flächenstücks! (3)

Beispiel 3: Zerfallsgesetz — 12 Punkte

Nach der Reaktorkatastrophe in Tschernobyl Ende April 1986 waren im radioaktiven Fallout, der auch Österreich verseuchte, mengenmäßig die Isotope Jod-131 und Caesium-137 stark vertreten.
Caesium-137 (Cs-137) hat eine Halbwertszeit von 30 Jahren.

a.) Stelle das Zerfallsgesetz für Cs-137 auf unter der Annahme von exponentiellem Zerfall! (5 Nachkommastellen!)

b.) Nach dem GAU von Tschernobyl wurde auf einer Wiese im Salzkammergut pro Kilogramm Gras eine Radioaktivität von 90 Nanocurie (nCi) Cs-137 gemessen. Berechne den Caesiumgehalt von Heu aus 1 kg gemähtem Gras nach 6 Jahren und 8 Monaten!

c.) Bei der Ribiselernte 1986 wurden 6,3 nCi/kg Cs-137 gemessen. Wie lange müsste ein Glas Ribiselmarmelade im Keller stehen, um unter den empfohlenen Grenzwert von 3 nCi/kg Cs-137 für Obstgenuss zu gelangen?

d.) Berechne die Halbwertszeit für die biologische Verweildauer von Cs-137 im menschlichen Körper, wenn 11 Tage nach der Einnahme der Caesiummesswert um 10,3 % zurückgegangen ist!

Beispiel 4: Vektorrechnung — 21 Punkte

Die Punkte A (3 | -3 | 3), B (5 | 1 | - 1) und C (1 | 5 | 1) sind drei Eckpunkte eines Quadrats ABCD.

a) Bestimme eine Gleichung der Ebene ε, in der dieses Quadrat liegt! (3)

b) Zeige, dass im Punkt B ein rechter Winkel vorliegt, und berechne die Koordinaten des 4. Eckpunktes D! (4)

c) Verbindet man jeden Eckpunkt des Quadrats mit dem Koordinatenursprung, so entsteht eine quadratische Pyramide mit gleich langen Seitenkanten. Zeige das! (2)

d) Zeige, dass der Fußpunkt der Höhe (= Schnittpunkt der Höhe mit dem Quadrat) gleichzeitig der Mittelpunkt des Quadrats ist! (4)

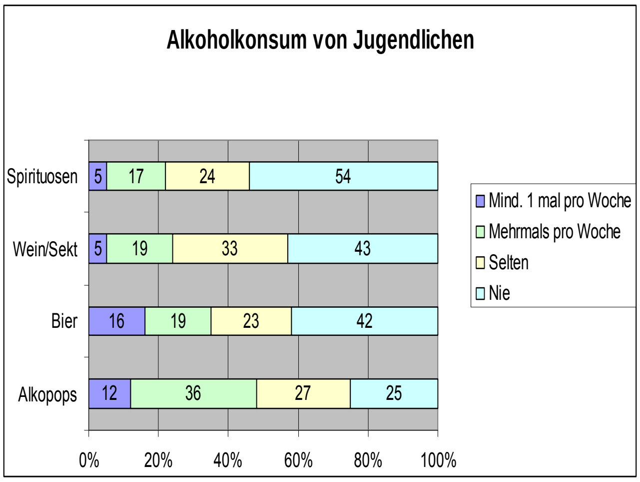
e) Berechne das Volumen und die Höhe der Pyramide! (4)

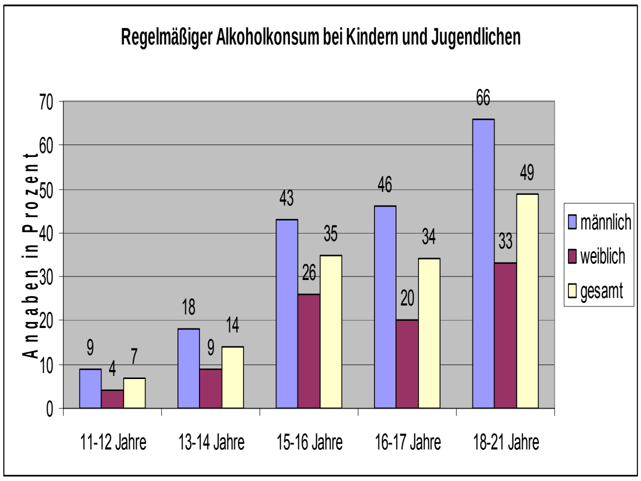
f) Berechne den Winkel α zwischen einer beliebigen Seitenfläche und der Grundfläche! (4)

Beispiel 5: Wahrscheinlichkeitsrechnung 19 Punkte

Österreichs Jugendliche liegen beim Missbrauch von Alkohol im europäischen Spitzenfeld. Fast ein Drittel der 15-jährigen Mädchen und etwa die Hälfte der 15-jährigen Burschen haben schon mehrere Rauscherfahrungen durch Alkohol gemacht, weiß das Anton-Proksch-Institut, ein Therapiezentrum für Alkohol-, Medikamenten- und Drogenabhängigkeit.
(Quelle: http://www.wien-konkret.at/gesundheit/sucht)

Betrachte dazu folgende Statistiken:





a.) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass in der 8B (21 SchülerInnen) (4)
   i) genau 14
   ii) mehr als 3, aber höchstens 7 SchülerInnen regelmäßig Alkohol trinken.
   (Nimm an, dass alle SchülerInnen schon 18 Jahre alt sind!)

b.) Wie viele SchülerInnen müsste man befragen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens eine(n) zu erwischen, der/die mehrmals pro Woche Alkopops konsumiert! (3)

c.) Im Europagymnasium gibt es zwei 8. Klassen (8A: 20 SchülerInnen, 8B: 21 SchülerInnen). In der 8A gibt es 4 AntialkoholikerInnen, in der 8B 8. Jemand trinkt bei der Maturaabschlussparty der beiden Klassen grundsätzlich keinen Alkohol und kann seine MitschülerInnen nach Hause fahren. (3)
Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er/sie aus der 8B?

Die Brauerei „Alki“ füllt ihre Produkte in Flaschen ab. Das Volumen der eingefüllten Biermenge ist normalverteilt mit Mittelwert von 0,52 Liter und einer Standardabweichung von 0,02 Liter.
Auf der Flasche wird ein Inhalt von 0,5 Liter angegeben.

d.) Berechne, wie viel Prozent der Flaschen einen Inhalt von weniger als der angegebenen Menge aufweisen. Skizziere den Sachverhalt! (3)

e.) In welchem symmetrischen Bereich um den Mittelwert liegt die Füllmenge mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit? Skizziere den Sachverhalt! (3)

f.) Wie groß muss der Mittelwert bei gleicher Standardabweichung sein, damit nur 5 % der Flaschen zu geringen Inhalt aufweisen? Skizziere den Sachverhalt! (3)

Beispiel 6: Trigonometrie **14 Punkte**

Vom Edinburgh Castle E mit der relativen Höhe h = 435 m (ca. 1230 ft) sieht man die National Gallery of Modern Arts N und die George Harriot's School G. Die National Gallery of Modern Arts sieht man unter dem Tiefenwinkel α = 17,3° und die George Harriot's School nach Schwenken um den Horizontalwinkel ε = 107,4° unter dem Tiefenwinkel β = 12,1°.

a.) Berechne, wie weit die beiden Sehenswürdigkeiten voneinander entfernt sind! (6)

b.) Verlängert man die Verbindungslinie Gallery of Modern Arts – George Harriot's School über die George Harriot's School hinaus um 1521 m, so kommt man zum Royal Botanic Garden R. Berechne, wie groß der Horizontalwinkel zwischen der George Harriot's School und dem Royal Botanic Garden ist! (6)

c.) Berechne die Entfernung (Luftlinie) zwischen dem Edinburgh Castle und dem Royal Botanic Garden! (2)

Bemerkung: Die Gebäudehöhen wurden vernachlässigt!

Edinburgh Castle in Edinburgh gilt als eine der bedeutendsten Sehenswürdigkeiten Schottlands.

National Gallery of Scotland

George Harriot's School Viktoria Street

Alle Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!
Die Rechenergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind auf 4 Nachkommastellen zu runden, jene der anderen Beispiele auf 2!

Viel Erfolg!

Allgemeine Bemerkungen:

- Verwendete Hilfsmittel: -Taschenrechner (TI 92)
  - Mathematische Formelsammlung
    (Kraft, Bürger, Unfried, Götz)
  - Zirkel, Lineal, Geodreieck
- Maximale Punktezahl: 100 Punkte
- Punkteschlüssel:

Punkte	Beurteilung
100 - 92	Sehr gut
91 - 80	Gut
79 - 61	Befriedigend
60 - 50	Genügend
49 - 0	Nicht genügend