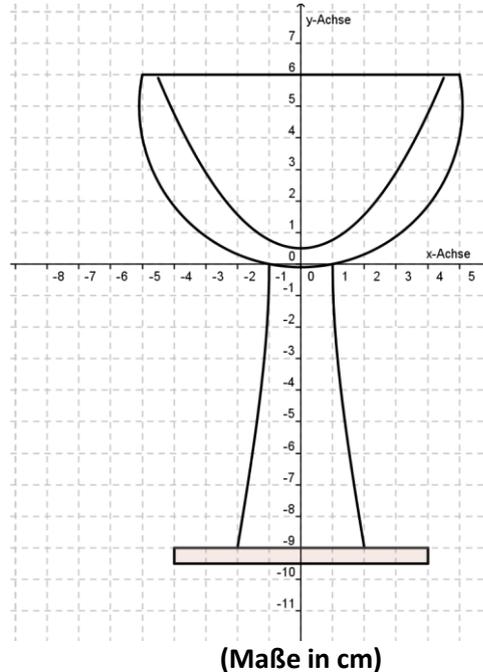


Beispiel 1: Integralrechnung – Kegelschnitte (23 Punkte)



Der Querschnitt eines kleinen Likörglases wird durch einige Kegelschnitte und Geraden gebildet!

Der **Querschnitt des Glashohlraumes** wird von einer Polynomfunktion 2. Grades gebildet, die symmetrisch bezüglich der y-Achse verläuft. Sie hat den Scheitel $S(0/1/2)$ und geht weiters durch den Punkt $P(3/3)$. Den Glasrand bildet die Gerade $y = 6$.

- a.) Zeige, dass die Polynomfunktion $f(x) = \frac{5}{18}x^2 + \frac{1}{2}$ lautet.
- b.) Warum hat diese Funktion keine Wendestelle? Argumentiere in ganzen Sätzen oder zeige dies durch eine Rechnung!
- c.) Wie viel Liter fasst ein randvoll gefülltes Glas?
- d.) In welcher Höhe muss die Markierung für 0,1 Liter angebracht werden? (Gemessen von der Unterkante des Sockels eines stehenden Glases!)

Der **Außenquerschnitt** des Glases wird von einem zur y-Achse symmetrischen Kreis gebildet, dessen Mittelpunkt $M(0/5)$ ist und der weiters durch den Punkt $Q(1/0)$ geht.

Die Oberkante ist begrenzt durch die Gerade $y = 6$. Der Stiel wird durch eine Hyperbel in 1. Hauptlage mit Brennpunkten $F_{1,2}(\pm\sqrt{28}/0)$ und Asymptoten $as: y = \pm\sqrt{27} \cdot x$ gebildet und durch die Gerade $y = -9$ begrenzt. Die „Standfläche“ ist ein Zylinder mit Dicke 5 mm und Radius 4 cm.

- e.) Welches Volumen hat der gesamte Glaskörper und wie groß ist die Masse des Glases? (Dichte von Glas: $2,2 \text{ kg/dm}^3$)

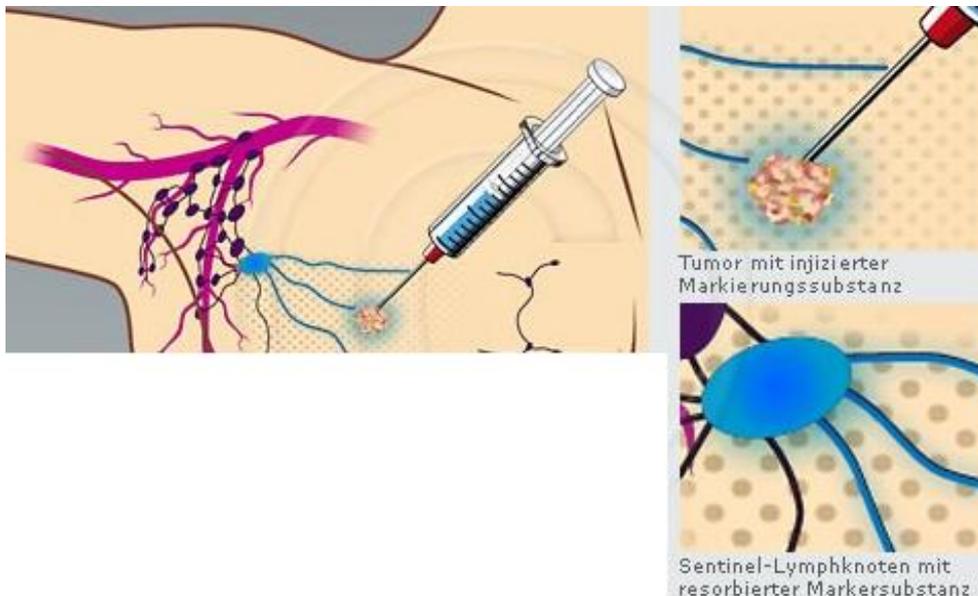
Beispiel 2: Zerfallsprozess – Differentialrechnung (23 Punkte)

Durch Injektion eines radioaktiven Markers und/oder eines Farbstoffes im Tumorbereich wird die lymphogene Tumormetastasierung simuliert.

Alle Lymphknoten, die die injizierte Markersubstanz aufnehmen, werden als "Sentinel"-Lymphknoten bzw. "Sentinel-Node" (SN) definiert.

Als **Sentinel-Node-Biopsie** wird die Entfernung aller Lymphknoten bezeichnet, die dieser Definition eines "Sentinel-Node" entsprechen.

Es werden hierfür also ausschließlich die markierten Lymphknoten entfernt.



Das radioaktive Isotop Technetium-99 ($Tc-99$) wird für medizinische Untersuchungen intravenös verabreicht. $Tc-99$ hat eine Halbwertszeit von 6,022 Stunden.

- Stelle das Zerfallsgesetz für dieses radioaktive Isotop auf, unter der Annahme, dass der Zerfall exponentiell erfolgt.
- Erkläre den Begriff Halbwertszeit und zeige, dass die Halbwertszeit unabhängig von der Ausgangsmenge ist!
- Einer Patientin werden um 10 Uhr $0,25 \mu\text{g}$ $Tc-99$ injiziert. Das Gehirnscanning erfolgt eine Stunde nach Verabreichung der Dosis. Welche Menge der Substanz hat sich in diesem Zeitraum schon abgebaut?
- Nach wie vielen Stunden sind nur mehr 30% der injizierten Dosis im Blut?
- Um eine eindeutige Diagnose stellen zu können, müssen sich mindestens $0,15 \mu\text{g}$ der Substanz im Blutkreislauf befinden. Wie viel μg muss man um 7 Uhr mindestens injizieren, um bei einer Untersuchung um 15 Uhr noch eine ausreichende Menge $Tc-99$ für eine eindeutige Diagnose im Blut eines Patienten vorzufinden?

Wird ein Pharmakon oral verabreicht spielt in der Pharmakologie die nach Bateman benannte Funktion $N(t) = \frac{N_0 \cdot k_a}{k_a - k_e} \cdot (e^{-k_e \cdot t} - e^{-k_a \cdot t})$ eine große Rolle. Dabei sei t die Zeitdauer in Stunden.

N_0 Anfangsdosis

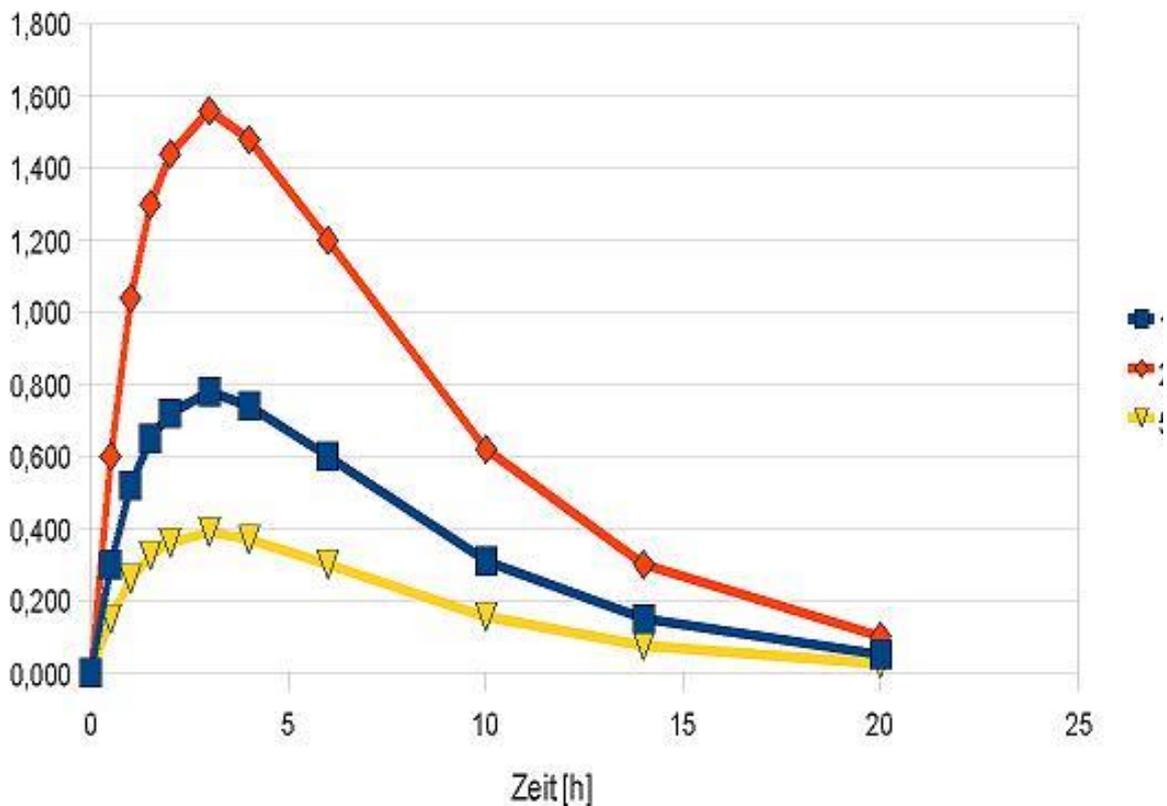
k_a Absorptionsrate

k_e Eliminationsrate

- f.) Für Chlorphenesin Carbamid im Blut sei die Absorptionsrate 1,04 und die Eliminationsrate 0,161. Hat dieses Zerfallsgesetz für eine Anfangsdosis von 28,7 µg/ml ein Maximum bzw. Minimum? Wenn ja, wo?
- g.) In untenstehender Graphik siehst du den typischen Verlauf eines Zerfalls nach der Batemanfunktion. Skizziere den Verlauf eines exponentiellen Zerfalls. Erläutere den Verlauf beider Zerfallsprozesse und vergleiche sie!

Bateman Zerfall

Plasmakonzentrationsverlauf



Beispiel 3: Wahrscheinlichkeitsrechnung – Beschreibende Statistik (20 Punkte)

Die Matura ist vorbei. Das ist ein Grund zu feiern. Die 8. Klassen haben ihre Maturareise zu Summersplash gebucht.

Die Fluggesellschaft bietet Linienflüge mit einem Airbus A300 an. Erfahrungsgemäß erscheinen nur 80% der Passagiere, die einen Flug gebucht haben, auch tatsächlich zum Abflug.

- a.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 8. Klassen (40 Schülern), die eine gemeinsame Reise gebucht haben, mehr als 2 den Abflug versäumen?
- b.) Das Flugzeug ist mit 300 Sitzplätzen für Passagiere ausgestattet.
 - i) In welchem Bereich liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze bei einem ausgebuchten Flug?
 - ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem ausgebuchten Flug mindestens 260 Plätze belegt werden?
- c.) Aus Sparsamkeitsgründen ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, Flüge überbuchen zu lassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer 20%igen Überbuchung (360 verkaufte Plätze) alle tatsächlich zum Abflug gekommenen Passagiere auch mitfliegen können?

Als Hepatitis bezeichnet man eine Entzündung der Leber. Die Infektion erfolgt meistens durch den Kontakt mit verunreinigten Gegenständen oder über die Nahrung (Verzehr von rohem Obst und Gemüse oder Fisch bzw. Meeresfrüchten). Die Virusinfektion ist in südlichen Ländern weiter verbreitet als bei uns in Österreich. Impfungen gibt es mittlerweile gegen Hepatitis A und B. In Österreich sind im Schnitt 14 von 100 Menschen nicht geimpft.

- d.) Wie viele Personen muss man auf der Maturareise befragen, damit sich mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit zumindest ein Nichtgeimpfter unter den Befragten befindet?
- e.) Nachdem einem Teil der ehemaligen Maturanten an einem Tag sehr übel war, wurde ein Test zur Früherkennung an den infizierten Jugendlichen durchgeführt, um festzustellen, ob diese eventuell an Hepatitis erkrankt seien oder die Übelkeit auf unmäßigen Alkoholenuss zurückzuführen sei. Im Schnitt infizieren sich 4% der Teilnehmer an einer Maturareise mit einer einfachen Form von Hepatitis. Der Test erkennt 99% der Hepatitisinfizierten als solche und 90% der anderen Ursachen können mit dem Test ausgeschlossen werden.
 - i) Stelle den Sachverhalt mittels eines Baumdiagramms dar!
 - ii) Das Testergebnis eines Probanden war positiv. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass er wirklich mit Hepatitis infiziert ist!

Beispiel 4: Trigonometrie (16 Punkte)



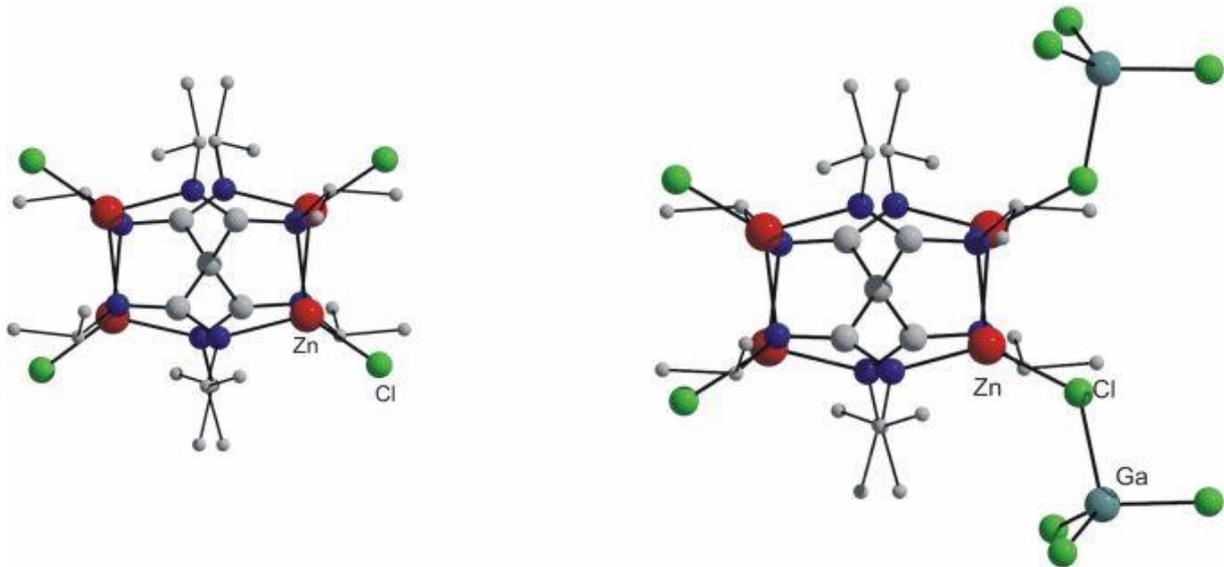
Unmittelbar neben einem geraden, horizontalen Straßenstück AB befindet sich ein steil ansteigendes, abgeholztes, ebenes Gelände ABG, das bis zu einem Gipfel G eines Berges mit Fußpunkt F hinaufreicht. Geologen meinen, ein Hang dieser Bodenbeschaffenheit sei murengefährdet, wenn seine Neigung mehr als 40° beträgt.

Zur Einschätzung der Gefahr wurde vermessen: die Länge des Straßenstückes: $AB = 800$ m, der Höhenwinkel von A zu G: $\sphericalangle FAG = \alpha = 35,3^\circ$, der Horizontalwinkel zwischen AB und der Vertikalebene, in der AG liegt: $\sphericalangle FAB = \beta = 54,7^\circ$, der Horizontalwinkel zwischen AB und der Vertikalebene, in der BG liegt: $\sphericalangle ABF = \gamma = 48,9^\circ$.

- Erstelle eine übersichtliche Skizze und beschrifte diese vollständig.
- Ermittle die relative Höhe des Berggipfels G zur Horizontalebene.
- Unter welchem Höhenwinkel erscheint der Berggipfel G von Geländepunkt B aus?
- Berechne den Neigungswinkel ϵ des Hanges gegen die Horizontalebene und entscheide dann, ob ein Murenabgang zu befürchten ist.

Beispiel 5: Vektorrechnung (18 Punkte)

Bei der Untersuchung von Molekülstrukturen werden Punktmodelle betrachtet.



Ein solches pyramidenförmiges Punktmodell sei durch die Eckpunkte $A(0/0/0)$, $B(4/0/0)$, C , D der quadratischen Grundfläche und dem Fußpunkt der Höhe $F(2/2/0)$ gegeben. Die Spitze der Pyramide sei $S(2/2/4)$.

- Gib die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte C und D sowie die Gleichung der durch die Eckpunkte ABS bestimmten Ebene in Normalvektorform an.
- Begründe mit Worten und mit einer Rechnung, dass es sich bei dieser Pyramide um eine gerade Pyramide mit Höhe $h = 4$ handelt!
- Bestimme den Winkel, den die Ebene ABS mit der Grundfläche $ABCD$ einschließen.
- Längs der Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ trifft ein schmales Lichtbündel im Punkt Q auf die Seitenfläche ABS und tritt im Punkt P der Seitenfläche CDS aus.
Berechne die Länge des Weges, den der Lichtstrahl innerhalb des Moleküls zurücklegt.

Allgemeine Bemerkungen:

Verwendete Hilfsmittel:

- Taschenrechner (Voyage 200)
- Mathematische Formelsammlung (Kraft, Bürger, Unfried, Götz)
- Zirkel, Lineal, Geodreieck

Alle Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein! Die Rechenergebnisse sind auf 2 Nachkommastellen zu runden, Wahrscheinlichkeitsergebnisse sind auf 4 Stellen anzugeben. Antworten sind zu schreiben!

Detaillierter Punkteschlüssel zu den Aufgaben:

Beispiel 1:

a	b	c	d	e	Summe
3	2	3	3	12	23

Beispiel 2:

a	b	c	d	e	f	g	Summe
3	3	3	3	3	5	3	23

Beispiel 3:

a	b	c	d	e	Summe
2	8	4	2	4	20

Beispiel 4:

a	b	c	d	Summe
3	5	4	4	16

Beispiel 5:

a	b	c	d	Summe
6	3	3	6	18

Maximale Punktezahl: 100 Punkte

Punkteschlüssel:

Punkte	Beurteilung
100 – 90	Sehr gut
89 – 78	Gut
77 – 64	Befriedigend
63 – 50	Genügend
49 – 0	Nicht genügend